Lineární programování v kostce

Pavel Popela

21. prosince 1995

Tento text je mezivýsledkem práce na kapitole zahrnující optimalizační metody a modely pro využití v inženýrských disciplínách. Text je průběžně aktualizován. Předkládaná verze se soustřeďuje na stručný výčet podstatných poznatků. Prvním čtenářům se omlouvám za překlepy a případné další chyby v této nulté verzi a prosím je o zaslání upozornění na adresu

`ppopela@kinf.fme.vutbr.cz`

Podotýkám, že hledání chyb v cizích učebních textech je ideální metodou pro osvojení problematiky.

1 Základní pojmy

1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

Seriózní zájemce o studium optimalizace by měl znát základní pojmy Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$. Vhodný úvod do problematiky poskytuje kniha: Kufner, Úvod do geometrie Hilbertova prostoru.

Uveďme pouze výčet potřebných pojmů:

1. Vektorový prostor $\mathbb{R}^n$, jeho prvky $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a vlastnosti operací $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $a.\mathbf{u}$, kde $a \in \mathbb{R}$.
2. Lineární nezávislost a závislost. Dimenze prostoru n, báze $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.
3. Skalární součin $\mathbf{u}^\top \mathbf{v}$ a jeho vlastnosti. Úhel vektorů a ortogonalita vektorů $\mathbf{u}^\top \mathbf{v} = 0$.
4. Norma $\| \mathbf{u} \| = \sqrt{\mathbf{u}^\top \mathbf{u}}$ a její vlastnosti. Ortonormalita $\| \mathbf{u} \| = 1$.
5. Metrika $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|$ a její vlastnosti. Konvergence.

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Zopakujte si definice a význam pojmů, jejich vlastnosti ilustrujte také graficky.

1.2 Matice a vektory

Jakákoliv skripta nebo učebnice VŠ matematiky pro 1.ročník dá vhodný přehled pro n-tice a tabulky reálných čísel. Autor je zvyklý používat knihu: Jirásek, Krigelstein, Tichý, Sbírka řešených příkladů z matematiky.

Uveďme podstatné pojmy:

1. n-tice reálných čísel jako vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.
2. Matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, typu $m \times n$, operace $\mathbf{A}^\top$, $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $-\mathbf{A}$, $a\mathbf{A}$, $\mathbf{AB}$ a vlastnosti. Determinanty $|\mathbf{A}|$, výpočet a vlastnosti.

3. Speciální matice (nulová $\mathbf{0}$, čtvercová, jednotková $\mathbf{I}$). Hodnost matice $h(\mathbf{A})$. Regulární, singulární matice.

4. Inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ a její výpočet.

5. Soustava lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, její vlastnosti, řešitelnost, metody řešení, Gaussova eliminační metoda, včetně úplné eliminace, zkracujeme GEM.

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Zopakujte si definice a význam pojmů. Přesvědčte se, že vám maticové výpočty nečiní žádné problémy.

1.3 Relace uspořádání

Dostatečný přehled dávají například skripta: Novák, Diferenciální počet. Uveďme výčet pojmů:

1. Relace ekvivalence $\sim$ (reflexivní, symetrická, tranzitivní relace) na množině A a její vlastnosti.

2. Relace uspořádání $\leq$ (reflexivní, antisymetrická, tranzitivní relace) na množině A a její vlastnosti. Lineární uspořádání.

3. Označení množin: $\forall B \subset A$ značíme
   $\min B = \{a \in B | \forall b \in B : a \leq b\}$,
   $\max B = \{a \in B | \forall b \in B : a \geq b\}$,
   $\inf B = \{a | a \in \max\{c | (c \in A) \wedge (\forall b \in B : c \leq b)\}\}$ a
   $\sup B = \{a | a \in \min\{c | (c \in A) \wedge (\forall b \in B : c \geq b)\}\}$.

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Zopakujte si definice a význam pojmů. Osvojte si uvedenou symboliku.

1.4 Extrémy funkcí

Zavádíme následující stručné označení:

1. Zobrazení a funkce značíme $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, respektive $x \longmapsto f(x)$, $\mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{g}(\mathbf{x})$.

2. Definiční obor funkce f značíme $D(f)$, obor funkčních hodnot značíme $H(f)$.

3. Budeme často používat lineární funkce $y = f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ a $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$.

4. Pro funkci $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ definujeme: Bod $\mathbf{x}_{opt}$ je bodem

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{lokálního} \\ \text{globálního} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{c} \text{ostrého} \\ \text{neostrého} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{c} \text{minima} \\ \text{maxima} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \exists O(\mathbf{x}_{opt}) : \forall \mathbf{x} \in O(\mathbf{x}_{opt}) \\ \forall \mathbf{x} \in C \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{c} \setminus \{\mathbf{x}_{opt}\} \\ \end{array} \right\} \times \quad f(\mathbf{x}_{opt}) \left\{ \begin{array}{cc} < & \leq \\ > & \geq \end{array} \right\} f(\mathbf{x})$$

   Pro účely numerických výpočtů se dále zavádí pojem izolovaného minima.

5. Dále označujeme množinu optimálních hodnot účelové funkce $\min_{\mathbf{x}}\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in C\}$ respektive $\max_{\mathbf{x}}\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in C\}$ a z kontextu rozlišujeme, zda hovoříme o lokálních nebo globálních extrémech.

6. Podobně:

   $\text{argmin}_{\mathbf{x}}\{f(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in C\} := \{\mathbf{x} \in C | f(\mathbf{x}) \in \min_{\mathbf{x}}\{f(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in C\}\}$ a

   $\text{argmax}_{\mathbf{x}}\{f(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in C\} := \{\mathbf{x} \in C | f(\mathbf{x}) \in \max_{\mathbf{x}}\{f(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in C\}\}$.

7. Pro globální extrémy a definiční obor $C \subset \mathbb{R}^n$ a funkci $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ platí

   $\min_{\mathbf{x}}\{f(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in C\} = \min H(f)$ a analogicky

   $\max_{\mathbf{x}}\{f(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in C\} = \max H(f)$.

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Zopakujte si definice a význam pojmů. Zkuste sami definovat různé typy extrémů. Ilustrujte graficky.

1.5 Podmnožiny $\mathbb{R}^n$

Přehled důležitých množin a jejich vlastností:

1. Podprostor $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$, kde $m < n$ (například rovina a prostor).
2. Nadrovina $H = \{\mathbf{x}|\mathbf{c}^\top\mathbf{x} = \alpha\} \subset \mathbb{R}^n$, kde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Poloprostory $H^+ = \{\mathbf{x}|\mathbf{c}^\top\mathbf{x} \geq \alpha\} \subset \mathbb{R}^n$ a $H^- = \{\mathbf{x}|\mathbf{c}^\top\mathbf{x} \leq \alpha\} \subset \mathbb{R}^n$.
4. Okolí $O(\mathbf{x}_0)$ a ryzí okolí $O(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.
5. Otevřená množina, vnitřek množiny $\text{int}S$.
6. Uzavřená množina, uzávěr množiny $\text{cl}S$.
7. Hranice ∂S množiny S.

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Zopakujte si definice a význam pojmů. Ilustrujte graficky.

2 Konvexní množiny

2.1 Pojem a jeho vlastnosti

Pojem: $S \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$, $\forall \lambda \in < 0; 1 >$ platí $\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in S$.

Poznámky: Poznamenejme, že v konvexní množině s každými dvěma body leží i úsečka, která je spojuje. Mezi každými dvěma body existuje přímá viditelnost a konvexní množina je v jistém smyslu fádní množina, protože v ní nelze hrát na schovávanou. Tak jako linearita usnadňuje řešení obyčejných diferenciálních rovnic, tak linearita usnadňuje řešení optimalizačních úloh.

Konvexní kombinace: Řekneme, že $\mathbf{x}$ je konvexní kombinací bodů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ $\Leftrightarrow \exists \lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, taková, že $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ a platí, že $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i$.

Vlastnosti: Průnik konvexních množin je konvexní množina, sjednocení konvexních množin nemusí být konvexní množina. $\text{cl}(\text{int}S) = \text{cl}S$, $\text{int}(\text{cl}S) = \text{int}S$.

Příklad: Ověřte z definice a vlastností, zda množina vymezená nerovnicemi $x_2^2 + 3x_3^2 \leq 5$, $4x_1^2 + 3x_4^2 \leq 3$, $3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 \leq 4$ je konvexní.

Příklad: Ukažte, že poloprostor H^- je konvexní množina. Zvolme $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in H^-$ libovolné. Zvolme libovolné $\lambda \in < 0; 1 >$. Definujme $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$. Platí $\mathbf{c}^\top\mathbf{y} = c^\top(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) = \mathbf{c}^\top\lambda\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}^\top(1-\lambda)\mathbf{x}_2 = \lambda\mathbf{c}^\top\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{c}^\top\mathbf{x}_2 \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha$. A tedy $\mathbf{y} \in H^-$.

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Zkuste pro různé množiny ukázat, zda jsou nebo nejsou konvexní.

Vlastnosti úseček: Je dána konvexní množina S. $\mathrm{int}S \neq \{\}$, $\mathbf{x}_1 \in \mathrm{cl}S$, $\mathbf{x}_2 \in \mathrm{int}S$, $\lambda \in (0; 1)$ pak $\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in \mathrm{int}S$.

Konvexní obal množiny: $\mathrm{conv}S$ je nejmenší konvexní množina, která obsahuje S. Konvexní obal S je dán průnikem všech konvexních množin obsahujících S. Konvexní obal S je roven množině všech konvexních kombinací bodů z S.

2.2 Věty o oddělitelnosti

Věta o nejbližším bodu: $\{\} \neq S \subset \mathbb{R}^n$, uzavřená, konvexní. $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \exists! \hat{\mathbf{x}} \in S$, $\forall \mathbf{x} \in S$: $\| \mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}} \| \leq \| \mathbf{y} - \mathbf{x} \|$ a platí $(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}})^\top(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \leq 0$.

Oddělitelnost množin: S_1 a S_2 jsou neprázdné podmnožiny $\mathbb{R}^n$. Nadrovina $H = \{\mathbf{x} : \mathbf{p}^\top\mathbf{x} = \alpha\}$ se nazývá:

1. *oddělující* pro množiny S_1 a $S_2 \Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \in S_1 : \mathbf{p}^\top\mathbf{x} \geq \alpha$ a současně $\forall \mathbf{x} \in S_2 : \mathbf{p}^\top\mathbf{x} \leq \alpha$. Jestliže navíc $S_1 \cup S_2 \not\subset H$, říkáme, že H *vlastně odděluje* S_1 a S_2.
2. *ryze oddělující* pro množiny S_1 a $S_2 \Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \in S_1 : \mathbf{p}^\top\mathbf{x} > \alpha$ a současně $\forall \mathbf{x} \in S_2 : \mathbf{p}^\top\mathbf{x} < \alpha$.
3. *silně oddělující* pro množiny S_1 a $S_2 \Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \in S_1 : \mathbf{p}^\top\mathbf{x} \geq \alpha + \epsilon$ a současně $\forall \mathbf{x} \in S_2 : \mathbf{p}^\top\mathbf{x} \leq \alpha$ pro $\epsilon > 0$.

Oddělení bodu a množiny: Nechť $\{\} \neq S \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená konvexní množina a $\mathbf{y} \not\in S$. Pak existuje vektor $\mathbf{p}$ a skalár α takový, že $\mathbf{p}^\top\mathbf{y} > \alpha$ a zároveň $\forall \mathbf{x} \in S : \mathbf{p}^\top\mathbf{x} \leq \alpha$. Důsledkem je, že každá konvexní uzavřená množina je průnikem všech uzavřených poloprostorů, které ji obsahují.

Věta o opěrné nadrovině: Nadrovinu H nazýváme opěrnou nadrovinou k $S \Leftrightarrow ((S \subset H^+) \vee (S \subset H^-)) \wedge (\mathrm{cl}S \cap H \neq \{\})$.

Je-li S konvexní a $\mathbf{x} \in \partial S \Rightarrow \exists H$ opěrná pro S a $\mathbf{x} \in H$.

Věta o silné oddělitelnosti: $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ uzavřené, konvexní, $S_1 \cap S_2 \neq \{\}$ a dále S_1 omezená $\Rightarrow \exists H$ silně oddělující S_1 a S_2.

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Zdůvodněte předpoklad omezenosti pomocí příkladu. Ilustrujte oddělitelnost na grafických příkladech.

3 Polyedrické množiny

3.1 Polyedr a jeho vlastnosti

Polyedr a simplex: $P \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní polyedr $\Leftrightarrow \exists S \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $|S| < \aleph_0$ a zároveň $\mathrm{conv}S = P$.

Simplex je konvexní polyedr, kde $S = \{\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ a vektory $\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$ jsou lineárně nezávislé.

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Uveďte příklady polyedrů a simplexů v rovině. Ilustrujte graficky.

Caratheodoryho věta: Mějme $S \subset \mathbb{R}^n$. Potom $\forall \mathbf{x} \in \text{conv}S, \exists \mathbf{x}_i \in S, \exists \lambda_i > 0, i = 1, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ tak, že platí $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i$ a $m \leq n + 1$.

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Vysvětlete tvrzení věty pomocí příkladu.

Krajní body: Mějme S konvexní neprázdnou podmnožinu $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{x} \in S$ je krajní bod $\Leftrightarrow \forall \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in S, \forall \lambda \in (0; 1)$ taková, že $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}_1 + (1-\lambda)\mathbf{y}_2$ pak platí $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}$.

S omezená konvexní uzavřená množina je konvexní m obalem svých krajních bodů. Konvexní polyedr má konečný počet krajních bodů. Konvexní polyedr je vždy průnikem konečného počtu poloprostorů.

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Uveďte příklady konvexních množin a jejich krajních bodů. Je průnik konečného počtu uzavřených poloprostorů vždy polyedr?

3.2 Polyedrické množiny a jejich vlastnosti

Polyedrická množina: je průnikem konečného počtu poloprostorů.

Každý polyedr je polyedrickou množinou, ale opak neplatí. Omezená polyedrická množina je polyedr. Polyedrická množina má konečný počet krajních bodů.

Důležité je předeslat, že jak množina přípustných řešení, tak množina optimálních řešení úlohy lineárního programování je polyedrická množina.

Stěna polyedrické množiny je neprázdným průnikem polyedrické množiny a některých nadrovin, které ji vytvářejí.

Hrana je jednorozměrná stěna. *Sousední krajní body* mají společnou hranu.

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Uveďte příklady polyedrických množin a polyedrů, nalezněte základní odlišnosti.

Konvexní kužel: Neprázdná množina $K \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *kužel* s vrcholem v počátku, pokud $\forall \alpha \geq 0 : \mathbf{x} \in K \Rightarrow \alpha \mathbf{x} \in K$. Je-li K konvexní, potom K nazýváme *konvexní kužel.*

Kužel generovaný S má prvky $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \xi$, kde $\alpha_i \geq 0$ a $\mathbf{x}_i \in S$. Označujeme jej pos$S$.

Polární kužel: Pro neprázdnou množinu $S \subset \mathbb{R}^n$ definujeme *polární kužel k S*, označený $S^* := \{\mathbf{p} | \forall \mathbf{x} \in S : \mathbf{p}^\top \mathbf{x} \leq 0\}$. Je-li $S = \{\}$, klademe $S^* = \mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Uveďte příklady kuželů a polárních kuželů. Ukažte, že platí: S^* je uzavřený konvexní kužel. Pro neprázdný konvexní uzavřený kužel K platí $K = (K^*)^*$.

Farkasova věta: Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $m \times n$ a $\mathbf{c}$ je n rozměrný vektor. Potom právě jedna z následujících množin je neprázdná:

1. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0} \wedge \mathbf{c}^\top \mathbf{x} > 0\}$
2. $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{A}^\top \mathbf{y} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Vysvětlete na obrázku význam Farkasovy věty.

4 Úvod do lineárního programování

4.1 Historie

Starověk: V antice byly formulovány a pomocí geometrie řešeny některé izoperimetrické úlohy. Například: Najděte rovnoběžník největšího obsahu při konstantním obvodu.

Středověk: Později byly formulovány zejména úlohy založené na rozkladu čísel na součet a součin tak, aby určité kritérium mělo optimální hodnotu.

Novověk: S rozvojem infinitesimálního počtu se objevily nyní klasické metody pro analytické hledání extrémů (průběh funkce, úloha o brachystochroně aj.). Následovalo postupné rozpracování teoretických poznatků, které připravilo nástroje pro 20.století.

20.století: Koncem třicátých letech Kantorovič formuloval ekonomickou úlohu pomocí lineárních omezení. Během druhé světové války byly rozpracovány základy matematických metod organizace vojenských operací. V roce 1941 Hitchcock formuloval dopravní úlohu, v roce 1945 formuloval Stiegler dietní problém. V roce 1947 Dantzig formuloval úlohu později nazvanou Koopmansem úlohou lineárního programování. Navrhl algoritmus nazvaný simplexová metoda pro její řešení. V diskusi Dantziga a Von Neumanna byl zaveden pojem duality a následovala desetiletí bouřlivého rozvoje optimalizačních modelů a metod a jejich aplikací.

4.2 Úloha lineárního programování

Zavedení: Úlohou lineárního programování rozumíme hledání optimálního řešení, což je prvek množiny:

$$? \in \operatorname*{argmin}_{\mathbf{x}} \{\mathbf{c}^\top \mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} \circ \mathbf{b}\} \tag{1}$$

kde $\circ \in \{\leq, =, \geq\}^n$.

Prvky úlohy: $z = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ nazýváme *účelovou funkcí*, $\mathbf{A}\mathbf{x} \circ \mathbf{b}$ *omezeními*.

Grafické řešení: Pokud lze úlohu lineárního programování převést na úlohu se dvěma (třemi) neznámými, lze ji řešit graficky.

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Řešte příklad graficky:

$$\begin{array}{ll}
\max & x_1 - x_2 \\
& x_1 + x_2 \quad \geq 0 \\
& 2x_1 - x_2 \quad \leq 2 \\
& x_1 \qquad\quad \geq 0
\end{array}$$

4.3 Typické aplikace

Následující úlohy lze formulovat jako úlohy lineárního programování:

Výrobní plán: Cílem je určit, kolik vyrábět kterého výrobku tak, abychom maximalizovali zisk. Víme, kolik které suroviny potřebujeme na jednotlivé výrobky. Známe množství surovin, která máme k dispozici.

Dopravní plán: Cílem je určit kolik kterých výrobků přepravovat po jednotlivých trasách od výrobců ke spotřebitelům tak, abychom měli co nejnižší náklady.

Směšovací problém: Chceme vyrobit slitinu předepsaného složení ze surovin se známým složením tak, abychom dodrželi metalurgické předpisy a minimalizovali náklady.

Řízení zásob: Cílem je plánovat nákupy tak, abychom uspokojili poptávku a přitom minimalizovali náklady na uskladnění.

Regresní analýza: Cílem je proložit naměřenými hodnotami přímku tak, abychom minimalizovali maximální absolutní odchylku.

Další aplikace: Lineární programování má aplikace především v technologii (řízení výroby), ekonomice (finanční modely) a konstruování (návrh struktury).

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Vyhledejte konkrétní aplikace. Slovní zadání formulujte matematicky.

4.4 Modelování

Obvyklý postup při modelování je:

1. Zjištění cíle modelu, sběr informací a dat.
2. Volba proměnných, vymezení vstupních dat. Ověření předpokladů určitosti dat, dělitelnosti hodnot proměnných, linearity.
3. Určení účelové funkce.
4. Volba omezení, rozlišení "hard" a "soft" omezení.
5. Sestavení a testování jednoduchého malého modelu.
6. Postupné přibližování modelu realitě, jeho úpravy.

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Vytvořte několik variant modelu složitějšího příkladu. Najděte vlastní užitečná pravidla pro tvorbu modelů.

4.5 Software

Knihovny podprogramů: Většina knihoven numerických podprogramů obsahuje obvykle implementaci simplexové metody (Numerical Recipes, NAG Library aj.)

Tabulkové procesory: Zahrnují řešiče LP většinou do 200 proměnných.

Matematické programy: Statgraphics, MatLab, Mathematica, Maple obsahují příkazy pro řešení úloh LP.

Řešiče: Specializované programy schopné řešit rozsáhlé problémy (CPLEX, LAMPS, OSL, XA, X-PRESS). Vstupem data v MPS formátu. Více prameny autorů Shardy a Morého.

Modelovací jazyky: Programovací jazyky pro optimalizační úlohy (GAMS, AMPL). Viz český manuál GAMS.

Uživatelská rozhraní: Usnadňují vstup dat a vyhodnocení výstupu z modelovacích jazyků (AIMMS).

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Navržené modely implementujte a řešte s použitím systému GAMS.

5 Teoretické základy lineárního programování

5.1 Transformace úlohy lineárního programování

Standardní tvar: Následující úlohu lineárního programování nazýváme úlohou ve standardním tvaru:

$$? \quad \in \quad \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}}\{\mathbf{c}^\top \mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \tag{2}$$

Poznamenejme, že vhodným násobením jednotlivých omezení -1 můžeme docílit, aby navíc $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

Úlohu převádíme na standardní tvar, abychom mohli s rovnicemi pracovat jednodušeji než s nerovnicemi. Dále $S = \{\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ je polyedrická množina, a toho rovněž využijeme.

Obecnou úlohu LP řešíme tak, že ji převedeme na standardní tvar, tu potom vyřešíme a získané řešení zpět transformujeme na řešení obecné úlohy.

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Kdy lze převést úlohu LP na standardní tvar? Převeďte na standardní tvar úlohu:

$$\begin{array}{rrl} \min & x_1 - x_2 & \\ & x_1 + x_2 & \geq 0 \\ & 2x_1 - x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & \geq 0 \end{array}$$

Změna účelové funkce: Platí: $\max_{\mathbf{x}}\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in C\} = -\min_{\mathbf{x}}\{-f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in C\}$. Dále

$\operatorname{argmax}_{\mathbf{x}}\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in C\} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}}\{-f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in C\}$. Pak max $x_1 - x_2$ nahradíme min $-x_1 + x_2$.

Podmínky nezápornosti: Každé reálné číslo můžeme vyjádřit nejednoznačně jako rozdíl dvou nezáporných čísel, např. $-3 = 0 - 3 = 2 - 5$. Proto je-li $x_j \in \mathbb{R}$, použijeme substituci $x_j = x_j^+ - x_j^-$, kde $x_j^+, x_j^- \geq 0$. Tedy $x_2 = x_2^+ - x_2^-$. Po dosazení dostáváme:

$$\begin{array}{rrl} \min & -x_1 + x_2^+ - x_2^- & \\ & x_1 + x_2^+ - x_2^- & \geq 0 \\ & 2x_1 - x_2^+ + x_2^- & \leq 2 \\ & x_1, x_2^+, x_2^- & \geq 0 \end{array}$$

Získání rovnic: Rozdíly mezi levou a pravou stranou nerovnic vyjádříme pomocí *doplňkových proměnných* (slack variable) a tím získáme omezení ve tvaru rovnic. A tedy pro náš příklad máme:

$$\begin{array}{lrl} \min & -x_1 + x_2^+ - x_2^- & \\ & x_1 + x_2^+ - x_2^- - x_3 & = 0 \\ & 2x_1 - x_2^+ + x_2^- + x_4 & = 2 \\ & x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4 & \geq 0 \end{array}$$

A maticově:

$$\min \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

5.2 Množina přípustných řešení

Existence optima: Nechť je dána úloha lineárního programování ve standardním tvaru a dále $S \neq \{\}$ a $\exists \gamma \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in S : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \geq \gamma \Rightarrow \exists \mathbf{x}_{min} \in \operatorname{argmin}\{\mathbf{c}^\top \mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Uvedené minimum je globální.

Krajní směry: Nechť $\{\} \neq M \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená konvexní množina. $\mathbf{0} \neq \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ nazýváme směr v $M \Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \in M, \forall \alpha \geq 0 : \mathbf{x} + \alpha \mathbf{d} \in M$.

Dva směry $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ v M nazýváme vzájemně různé $\Leftrightarrow \forall \alpha > 0 : \mathbf{d}_1 \neq \alpha \mathbf{d}_2$.

Směr $\mathbf{d} \in M$ se nazývá *krajní směr* $M \Leftrightarrow$ když jej nelze vyjádřit jako kladnou lineární kombinaci dvou vzájemně různých směrů v M. Tj. je-li $\mathbf{d} = \alpha_1 \mathbf{d}_1 + \alpha_2 \mathbf{d}_2$, kde $\alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow \mathbf{d}_1 = \alpha \mathbf{d}_2$, kde $\alpha > 0$.

Charakteristika krajních bodů: Nechť $S = \{\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, h(\mathbf{A}) = m$, kde m je počet řádků matice $\mathbf{A}$. $\mathbf{x}$ je krajní bod $S \Leftrightarrow$ po přeskládání sloupců matice $\mathbf{A}$ (a odpovídajících složek vektoru $\mathbf{x}$) lze matici $\mathbf{A}$ vyjádřit jako $\mathbf{A} = (\mathbf{B}, \mathbf{N})$ tak, že platí:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{B}$ je regulární a splňuje $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

Podrobný příklad:

$$\begin{array}{lrl} \max & 4x_1 - 3x_2 & \\ & x_1 + x_2 & \leq 40 \\ & 2x_1 + x_2 & \leq 60 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Vyřešte si také graficky. Převedeme na standardní tvar:

$$\min \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Následující tabulka uvádí přehled *bázických proměnných* $\mathbf{x}_B$ a *nebázických proměnných* $\mathbf{x}_N$, bázickou matici $\mathbf{B}$ a odpovídající bázické řešení $\mathbf{x}$. Dále je uvedeno, zda bázické řešení je přípustné (tj. splňuje $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$). Zkratka BFS značí basic feasible solution. Dále uvádíme body definované na grafu bázickými řešeními, je uvedeno, zda body jsou krajní, a kterými *aktivními omezeními* jsou určeny.

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{x}$	BFS	graf	krajní?	omezení
x_1, x_2	x_3, x_4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(20, 20, 0, 0)$	ano	E	ano	AEB, CED
x_1, x_3	x_2, x_4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$(30, 0, 10, 0)$	ano	C	ano	CED, ACF
x_1, x_4	x_2, x_3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(40, 0, 0, -10)$	ne	A	ne	ABD, ACF
x_2, x_3	x_1, x_4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(0, 60, -20, 0)$	ne	D	ne	CED, DBF
x_2, x_4	x_1, x_3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$(0, 40, 0, 20)$	ano	B	ano	AEB, DBF
x_3, x_4	x_1, x_2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(0, 0, 40, 60)$	ano	F	ano	DBF, ACF

$\boxed{\text{Úkol:}}$ Vypočtěte některá bázická řešení uvedená v tabulce. Sestavte podobnou tabulku pro příklad:

$$\begin{array}{lll} \max & 5x_1 + 2x_2 & \\ & x_1 + x_2 & \leq 6 \\ & x_1 - x_2 & \leq 0 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Všimněte si odlišností mezi tabulkami.

Poznámky:

1. Bázické proměnné jednoznačně určují submatici $\mathbf{B}$.
2. $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ může dát stejné výsledky pro $\mathbf{B}$ určené různými bázickými proměnnými.
3. Jsou-li stejná bázická řešení pro různé bázické proměnné hovoříme o degeneraci úlohy LP. Je-li složka odpovídající bázické proměnné nulová, pak je úloha LP degenerovaná.
4. Bázickému řešení odpovídá průsečík nadrovin určených aktivními omezeními.
5. Bázickému přípustnému řešení odpovídá krajní bod .

Počet krajních bodů: Množina S má nejvýše $\binom{n}{m}$ krajních bodů.

Existence krajních bodů: Nechť $S \neq \{\}$, $h(\mathbf{A}) = m$, pak S má alespoň 1 krajní bod.

Charakteristika krajních směrů: $S \neq \{\}$, $h(\mathbf{A}) = m$. $\mathbf{d}$ je krajní směr $S \Leftrightarrow$ Po přeskládání sloupců matice $\mathbf{A}$ a odpovídajících složek $\mathbf{d}$ lze $\mathbf{A}$ vyjádřit ve tvaru $\mathbf{A} = (\mathbf{B}, \mathbf{N})$ tak, že $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j \leq \mathbf{0}$ pro některý sloupec $\mathbf{a}_j$ matice $\mathbb{N}$ a platí:

$$\mathbf{d} = \alpha \begin{pmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j \\ \mathbf{e}_j \end{pmatrix}$$

kde $\alpha > 0$ a $\mathbf{e}_j = (e_{j,1}, \ldots, e_{j,n-m})$ a dále $e_{j,j} = 1$ a $e_{j,i} = 0$ pro $i \neq j$.

Počet krajních směrů: Množina S má nejvýše $\binom{n}{m}.(n-m)$ krajních směrů.

Existence krajních směrů: $S \neq \{\}$ je neomezená $\Leftrightarrow$ obsahuje alespoň 1 krajní směr.

5.3 Základní věty lineárního programování

Věta o reprezentaci: $S \neq \{\}$, $h(\mathbf{A}) = m$, nechť $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ jsou všechny krajní body S a $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_l$ všechny krajní směry S. Pak platí $\mathbf{x} \in S \Leftrightarrow \exists \lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\exists \mu \geq 0$ tak, že

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \mathbf{d}_j \tag{3}$$

Základní věta lineárního programování: Mějme úlohu lineárního programování ve standardním tvaru, $h(\mathbf{A}) = m$, $S \neq \{\}$. Nechť $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ jsou všechny krajní body S a $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_l$ všechny krajní směry S.

Pak existuje optimální řešení $\mathbf{x}_{min} \in S \Leftrightarrow \forall j = 1, \ldots, k : \mathbf{c}^\top \mathbf{d}_j \geq 0$.

Jestliže existují optimální řešení, pak existuje mezi nimi alespoň jeden krajní bod.

Úplná enumerace: Je-li S omezená, stačí vyčíslit a porovnat $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ pro všechny krajní body. Je-li S neomezená, musíme uvažovat i všechny krajní směry pro jednotlivé body. Tato metoda je nerealizovatelná i pro malé úlohy (pro 20 proměnných a 10 omezení máme horní odhad počtu krajních bodů 184756).